Lógica em Computação
.: Calculo Proposicional :.
Prof. Luís Rodrigo

{luisrodrigoog@gmail.com}
[http://lrodrigo.ddns.net/]

Dedução

Lógica

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Argumento

- Denomina-se **argumento** um **conjunto de proposições** P1, P2, ... Pn chamadas **premissas**, **decorre** uma proposição Q, chamada **conclusão**.
- Na Lógica, dois tipos de **argumentos, dedutivos e indutivos**
- Nesta parte do curso examinaremos os **argumentos dedutivos**.
- Eis um exemplo de argumento:
  - P1: **Se** José pegou as jóias **ou** a Sra. Krasov mentiu, **então** ocorreu um crime.
  - P2: **Se** ocorreu um crime **então** o Sr. Krasov estava na cidade.
  - P3: O Sr. Krasov **não** estava na cidade.
  - Q: **Portanto, ou** José **não** pegou as jóias **ou** a Sra. Krasov **não** mentiu.

- Uma **conclusão sempre decorre das premissas;**
  - Ou seja, a **veracidade da conclusão** está **incluída** na **veracidade das premissas**;
  - Se as **premissas** forem **verdadeiras**, a **conclusão** também o **será**.
- Quando a **conclusão** realmente **decorre das premissas**, dizemos que o **argumento é válido**; quando não, dizemos que o argumento é inválido.
- Os **argumentos inválidos** são também chamados **sofismas**.

Vamos a dois exemplos de argumentos:

- **Se** eu tiver dinheiro, vou ao cinema **ou** ao teatro; **mas** eu **não** tenho dinheiro. **Logo**, **ou não** vou ao cinema **ou não** vou ao teatro.
  - ☐ A **conclusão** apresentada **não decorre** das premissas.
  - ☐ Portanto o argumento é inválido.

- **Se** eu estudar, fico cansado; **se** eu ficar cansado, durmo. **Logo**, **se** eu estudar, durmo.
  - ☑ Claramente, a conclusão decorre das premissas,
  - ☑ Logo o argumento é válido.

- A estrutura que melhor representa um **argumento**, é a **operação de condicionamento**
- Um argumento é, portanto, uma condicional da forma

$$P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \rightarrow Qo.$$

- A **validade** do **argumento depende exclusivamente** do **relacionamento** lógico entre as **premissas** e a **conclusão**;
- Se um **argumento é válido**, então a **condicional** que o representa é sempre **verdadeira**
- Ou seja, se um **argumento é válido**, a **condicional** que o representa é uma **tautologia**.

- A **Tabela Verdade** pode ser utilizada para **determinar** a **validade** ou **invalidade** de um **argumento**;

- Por exemplo, suponha o argumento:

  "se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro"

- Que pode ser representado por:

- A **Tabela Verdade** pode ser utilizada para **determinar** a **validade** ou **invalidade** de um **argumento**;

- Por exemplo, suponha o argumento:

  "se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro"

- Que pode ser representado por:

$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

- **Onde:**
  - **p** – eu tiver dinheiro
  - **q** – vou ao cinema
  - **r** – vou ao teatro

p	q	r	q ∨ r	p→q ∨ r	¬p	¬q	¬r	¬q ∨ ¬r	(p → q ∨ r) ∧ (¬ p)	(p → q ∨ r) ∧ (¬ p) → (¬ q ∨ ¬ r)
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

A expressão não é **uma tautologia**, e, consequentemente, o **argumento não é válido**.

- Vejamos outro exemplo de argumento:

"se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo"

- Representado por:
  - **??????**

- Vejamos outro exemplo de argumento:

“se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo”

- Representado por:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

- Onde:
  - **p** – eu estudar
  - **q** – eu ficar cansado
  - **r** – eu dormir

p	q	r	p → q	q → r	p → r	(p → q) ∧ (q → r)	(p → q) ∧ (q → r) → (p → r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- Como a **condicional** é uma **tautologia**, o **argumento** é **válido**.
- O argumento apresentado é na verdade a regra de inferência chamada **Silogismo Hipotético.**

Argumento

- As **condicionais tautológicas** com **poucos antecedentes** e cuja forma já é conhecida, são chamadas **regras de inferência.**
- Enquanto as **condicionais maiores**, que ainda **devemos mostrar** que são tautologias são chamadas **argumentos**.
- E os **argumentos** com **duas premissas** são chamados **silogismos**.

- Para **representar** os **Argumentos** utilizamos a seguinte notação
    - Cada **premissas** será representada **uma linha** separada
    - Utilizaremos o símbolo $\vdash$ para indicar a **conclusão**.

- **Por exemplo:**

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."

- **Por exemplo:**

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."

- **Fazendo:**
  - **p** – José pegou as jóias
  - **q** – a Sra. Krasov mentiu
  - **r** – ocorreu um crime
  - **s** – o Sr. Krasov estava na cidade

- **Por exemplo:**

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."

- **Fazendo:**
  - p − José pegou as jóias
  - q − a Sra. Krasov mentiu
  - r − ocorreu um crime
  - s − o Sr. Krasov estava na cidade

- **Temos:**

1. $p \vee q \rightarrow r$
2. $r \rightarrow s$
3. $\neg s$
4. $\vdash \neg p \vee \neg q$

- Vamos a um outro exemplo:

"Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro;
mas eu não tenho dinheiro.
Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro."

- Vamos a um outro exemplo:

"Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro."

- Com a simbologia descrita, vem:
  1. $p \rightarrow q \vee r$
  2. $\neg p$
  3. $\vdash \neg q \vee \neg r$

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Outro exemplo:

"Se eu estudar, fico cansado;
se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo."

Outro exemplo:

"Se eu estudar, fico cansado;
se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo."

- Utilizando a simbologia temos:
    1. $p \rightarrow q$
    2. $q \rightarrow r$
    3. $\vdash p \rightarrow r$

Dedução

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

- Vimos que **tabelas verdade** podem ser utilizadas para **mostrar** que um **argumento é válido ou inválido**.
- No entanto, esse método apresenta **dois sérios inconvenientes**;
  - A quantidade de linhas cresce rapidamente, à medida que aumenta o número de proposições simples;
  - Com **10 proposições** a tabela necessita de **1024 linhas**, e com **11**, o numero de linhas vai a **2048**. Com mais umas poucas proposições, sua construção se torna impraticável.
  - No **Cálculo de Predicados**, muitas vezes não existe um procedimento que permita estabelecer o valor lógico de uma dada afirmação, o que torna impossível a construção da Tabela Verdade.
- Para contornarmos estes problemas utilizaremos **métodos dedutivos,** e sua aplicação chama-se **dedução**.

- O **conceito de dedução** pode ser apresentado da seguinte forma:
  - Dado um **argumento** **P1 ∧ P2 ∧ ... ∧ Pn → Q**
  - Chama-se **demonstração ou** **dedução de Q** a partir das premissas P1 , ... Pn, a **sequencia finita** de **proposições X1, X2, ... Xk;**
  - Cada **Xi** ou é uma **premissa ou decorre logicamente** de proposições anteriores da sequencia
  - **Xi** deve ser obtida através da atuação de **equivalências ou inferências** sobre **uma proposição ou uma conjunção** de proposições anteriores.
  - A última **proposição Xk** deve ser a **conclusão Q** do argumento dado.

O processo de dedução consiste basicamente dos seguintes passos:

- Dado um argumento **P1 ∧ P2 ∧ ... ∧ Pn → Q**
- Fazemos:
    1. Definimos o conjunto das **premissas {P1, P2, ..., Pn}**;
    2. **sobre um ou mais elementos** do conjunto fazemos **atuar equivalências e inferências** conhecidas, obtendo novas proposições, e incluindo-as no conjunto P;
    3. repetimos o passo acima **até que** a proposição **incluída** seja o conseqüente **Q**.

Exemplo: Provando o argumento (Modus Ponens)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

Enumerando as proposições do conjunto P, temos:

1) $p \rightarrow q$
2) p
3) $\neg p \vee q$
   - ☑ $p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg p \vee q$ (Lei da Condicional)

4) $p \wedge (\neg p \vee q)$
   - ☑ Conjunção das expressões (2) e (3)

4. $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$
   - ☑ Utilizando a **Lei de Distributividade** em 4

5. $p \wedge q$
   - ☑ $p \wedge \neg p$ é equivalente a F, uma contradição;
   - ☑ $F \vee (p \wedge q)$ é equivalente a $p \wedge q$;

6. q
   - ☑ Pela **Regra da Simplificação**, $p \wedge q \Rightarrow q$, o que nos permite incluir em P a expressão
   - ☑ o que completa a demonstração.

Forma de apresentação para as deduções.

- 1a Coluna - **numero** dos passos dados na dedução;
  - a cada passo obtemos um proposição, é referenciada no restante da dedução por esse número;
  - os primeiros passos são as premissas;
- 2a Coluna - a **proposição** obtida naquele passo;
  - a última deve ser a conclusão do argumento.
- 3a Coluna - **indicação de como foi obtida** a proposição naquele passo;
  - obtidas atuando **equivalências, regras de inferência** ou outras propriedades sobre premissas dos passos anteriores;

Repetimos a dedução de Modus Ponens

1. $p \rightarrow q$ - Premissa
2. p - Premissa
3. $\neg p \vee q$ - (Lei da Condicional sobre 1)
4. $p \wedge (\neg p \vee q)$ - Conjunção de (2) e (3)
5. $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$ - Lei da Distributividade sobre (4)
6. $F \vee (p \wedge q)$ - Definição de contradição em (5)
7. $p \wedge q$ - Definição de disjunção em (6)
8. q - Regra da Simplificação sobre (7)

Regras

Inferência

Equivalência

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

- Conjunto fundamental de equivalências que podem ser utilizadas na demonstração da validade dos argumentos

Idempotência [**ID**]	$p \Leftrightarrow p \wedge p$ $p \Leftrightarrow p \vee p$
Comutatividade [**COM**]	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associatividade [**ASSOC**]	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Distributividade [**DIST**]	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Dupla Negação [**DN**]	$p \Leftrightarrow \neg (\neg p)$
Leis de De Morgan [**DM**]	$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Condicional [**COND**]	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Bicondicional [**BICOND**]	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Contraposição [**CP**]	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
Exportação – Importação [**EI**]	$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Equivalências com tautologias [**ET**]	$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$
Equivalências com contradições [**EC**]	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $p \vee F \Leftrightarrow p$
Conjunção [**CPNJ**]	$p , q \Leftrightarrow p \wedge q$
Auto-Referencia [**AUTO**]	$p \Leftrightarrow p \text{ v } p$ $p \text{ ^ } p \Leftrightarrow p$

- Conjunto fundamental de regras de inferência, para mostrar a validade de argumentos mais complexos.

Adição [**AD**]	p ⇒ p ∨ q
Simplificação [**SIMP**]	p ∧ q ⇒ p
Simplificação Disjuntiva [**SIMPD**]	(p ∨ q) ∧ (p ∨ ¬ q) ⇒ p
Absorção [**ABS**]	p → q ⇒ p → p ∧ q
Modus Ponens [**MP**]	p ∧ (p → q) ⇒ q
Modus Tollens [**MT**]	(p → q) ∧ ¬ q ⇒ ¬ p
Silogismo disjuntivo [**SD**]	(p ∨ q) ∧ ¬ p ⇒ q
Silogismo Hipotético [**SH**]	(p → q) ∧ (q → r) ⇒ p → r
Dilema Construtivo [**DC**]	(p → q) ∧ (r → s) ∧ (p ∨ r) ⇒ q ∨ s
Dilema Destrutivo [**DD**]	(p → q) ∧ (r → s) ∧ (¬ q ∨ ¬ s) ⇒ ¬ p ∨ ¬ r
Conjunção [**CONJ**]	p, q ⇒ p ^ q
Exportação [**EXP**]	(p ^ q) → r ⇒ p → (q → r)
Inconsistência [**INC**]	p, ¬p → q

Simplificação da Conclusão

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Lógica em Computação
Petrópolis, 19 de Maio de 2016
Versão: 1.0

Simplificação da Conclusão

- Quando a conclusão é uma proposição composta, costuma−se simplifica-la, de forma a facilitar a dedução.

Conclusão da forma $p \wedge q$ - conjunção

- Devemos **obter**, as parcelas **p e q**,
- e a seguir, **obter** $\mathbf{p \wedge q}$, por CONJ.

Exemplo:

"**Se** a procura do produto aumentar, seu preço subirá**; se** o preço subir, o produto não será exportado; **se não** houver importação **ou se** o produto for exportado, o produto escasseará. A procura do produto aumentou e **não** haverá importação. **Logo**, o produto **não** será exportado e escasseará."

Simplificação da Conclusão

Fazendo:

- p – ????
- q – ????
- r – ????
- s – ????
- t – ????

Temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

1. ????

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Fazendo:

- p – a procura aumentar
- q – o preço subir
- r – o produto ser exportado
- s – haver importação
- t – o produto escassear

Temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow \neg r$
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$
4. $p \wedge \neg s$
5. $\vdash \neg r \wedge t$

Deduzindo temos:

1. $p \rightarrow q$ (premissa)
2. $q \rightarrow \neg r$ (premissa)
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$ (premissa)
4. $p \wedge \neg s$ (premissa)
5. ???
6. ???
7. ???
8. ???
9. ???
10. ???
11. ???

Simplificação da Conclusão

Deduzindo temos:

1. $p \rightarrow q$ (premissa)
2. $q \rightarrow \neg r$ (premissa)
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$ (premissa)
4. $p \wedge \neg s$ (premissa)
5. p (4, SIMP)
6. $p \rightarrow \neg r$ (1, 2, SH)
7. $\neg r$ (5, 6, MP)
8. $\neg s$ (4, SIMP)
9. $\neg s \vee r$ (8, AD)
10. t (3, 9, MP)
11. $\neg r \wedge t$ (7, 10, CONJ)

Simplificação da Conclusão

Conclusão da forma $q \rightarrow r$

- Suponha que o argumento tenha a forma: $P \rightarrow (q \rightarrow r)$

- Onde **P** é a **conjunção de premissas**. Ora, sabemos que, por **EI**,
    - $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

- Logo, temos o argumento na forma
    - $P \wedge q \rightarrow r$
- Portanto, para deduzirmos um argumento cuja conclusão é da forma:

$$q \rightarrow r$$

  - Incluímos **q** no conjunto de **premissas**, e procuramos **deduzir r**.
  - Este artifício é conhecido como **Dedução da Condicional**

Exemplo:

"Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo então pago a dívida e me mudo. Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar."

Fazendo

- p – ????
- q – ????
- r – ????
- s – ????
- t – ????
- u – ????

Simplificação da Conclusão

Exemplo:

"Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo então pago a dívida e me mudo. Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar."

Fazendo

- **p – a casa ficar vazia**
- **q – eu conseguir o empréstimo**
- **r – eu pagar a dívida**
- **s – me mudar**
- **t – Pedro ficar em São Paulo**
- **u – voltar a estudar**

Temos o argumento:

- ????

Temos o argumento:

- $p \lor q \rightarrow r \land s$
- $s \lor t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Simplificação da Conclusão

Temos o argumento:

- $p \lor q \rightarrow r \land s$
- $s \lor t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$

Utilizando Dedução da Condicional, incluo “p” nas premissas e a conclusão se reduz a “u”:

- ????

Temos o argumento:

- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$

Utilizando Dedução da Condicional, incluo "p" nas premissas e a conclusão se reduz a "u":

- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- p
- $\vdash u$

Deduzindo:

1	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	premissa
2	$s \vee t \rightarrow u$	premissa
3	p	premissa
4		
5		
6		
7		
8		

Deduzindo:

1	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	premissa
2	$s \vee t \rightarrow u$	premissa
3	p	premissa
4	$p \vee q$	3, AD
5	$r \wedge s$	4, 1, MP
6	s	5, SIMP
7	$s \vee t$	6, AD
8	u	7, 2, MP

Conclusão da forma $p \vee q$

- Sabemos que, por COND, que

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

- Portanto, se a conclusão do **argumento** tem a forma $p \vee q$

- Podemos **substituí–la** por $\neg p \rightarrow q$,

- E utilizando **Dedução da Condicional:**
  1. **incluir** $\neg p$ nas premissas
  2. e **deduzir** q.

Exemplo:

"Ou pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta Logo, ou pagamos a dívida ou as exportações não crescem"

Fazendo

- p – ???
- q – ???
- r – ???

Exemplo:

"Ou pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta Logo, ou pagamos a dívida ou as exportações não crescem"

Fazendo

- **p – pagar a dívida**
- **q – o déficit aumentar**
- **r – as exportações crescerem**

Temos o argumento

1. ???
2. ???
3. ???

Temos o argumento

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\vdash p \vee \neg r$

Temos o argumento

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\vdash p \vee \neg r$

- Como a conclusão $p \vee \neg r$ é equivalente a $\neg p \rightarrow r$;
- Então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo:

1. ???
2. ???
3. ???
4. ???

Temos o argumento

1. $p \lor q$
2. $r \to \neg q$
3. $\vdash p \lor \neg r$

- Como a conclusão $p \lor \neg r$ é equivalente a $\neg p \to r$;
- Então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo:

1. $p \lor q$
2. $r \to \neg q$
3. $\neg p$
4. $\vdash \neg r$

Deduzindo:

	$\vdash \neg r$	
1	$p \vee q$	premissa
2	$r \rightarrow \neg q$	premissa
3	$\neg p$	premissa
4		
5		

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Deduzindo:

	$\vdash \neg r$	
1	$p \vee q$	premissa
2	$r \rightarrow \neg q$	premissa
3	$\neg p$	premissa
4	q	1, 3, SD
5	$\neg r$	2, 4, MT

Simplificação da Conclusão

Uma outra forma de deduzir uma disjunção, é obter um dos disjuntos, e, por adição, incluir o outro.

- Exemplo, considere o argumento:
  1. **$(\neg p \lor q) \land (r \rightarrow s)$**
  2. **$\neg q$**
  3. **$\vdash \neg p \lor s$**

- Como a **conclusão é $\neg p \lor s$**:
  - podemos **deduzir $\neg p$**
    - e, por **adição, $\neg p \lor s$**
  - ou **deduzir** s,
    - e, **por adição, $\neg p \lor s$**

Deduzindo:

	$\vdash \neg p \vee s$	
1	$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$	premissa
2	$\neg q$	premissa
3		
4		
5		

Deduzindo:

	$\vdash \neg p \lor s$	
1	$(\neg p \lor q) \land (r \rightarrow s)$	premissa
2	$\neg q$	premissa
3	$\neg p \lor q$	1, SIMP
4	$\neg p$	2, 3, SD
5	$\neg p \lor s$	4, AD

Conclusão da forma $p \leftrightarrow q$

- Sabemos, por BICOND, que:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$$

- Então, se a **conclusão** tem a forma $\mathbf{p \leftrightarrow q}$,
  - podemos **substituí−la** por $\mathbf{(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)}$,
  - logo temos que **deduzir, independentemente,** $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

- Utilizando **Dedução da Condicional**,
  - na dedução de $\mathbf{p \rightarrow q}$, **incluir** $\mathbf{\neg p}$ nas premissas e **deduzir** $\mathbf{q}$
  - na dedução de $\mathbf{q \rightarrow p}$, incluir $\mathbf{\neg q}$ nas premissas e **deduzir** $\mathbf{p}$.

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

Simplificação da Conclusão

- Considere o argumento
  1. $p \wedge q \rightarrow r$
  2. $r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$
  3. $s \rightarrow q$
  4. p
  5. $\vdash r \leftrightarrow s$

- Devemos realizar duas deduções:
  - uma para **r → s,** para a qual incluímos **r nas premissas** e **deduzimos s;**
  - Outra para **s → r,** na qual incluímos **s nas premissas** e **deduzimos r.**
- As **deduções** devem ser **realizadas em separado,** pois os resultados intermediários de uma não podem ser utilizados na outra.

Deduzindo "s":

	$\vdash s$	
1	$p \land q \rightarrow r$	premissa
2	$r \lor q \rightarrow \neg p \lor s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	r	premissa
6		
7		
8		

Deduzindo "s":

	$\vdash s$	
1	$p \land q \rightarrow r$	premissa
2	$r \lor q \rightarrow \neg p \lor s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	r	premissa
6	$r \lor q$	5, AD
7	$\neg p \lor s$	2, 5, MP
8	s	4, 7, SD

Deduzindo "r":

	$\vdash r$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	s	premissa
6		
7		
8		

Deduzindo "r":

	$\vdash r$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	s	premissa
6	q	3, 5, MP
7	$p \wedge q$	4, 6, CONJ
8	r	1, 7, MP

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

- Alternativamente, poderíamos, utilizar a outra equivalência BICOND,

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

- **Nesse caso, bastaria:**
  - **deduzir** $p \land q$,
  - ou **deduzir** $\neg p \land \neg q$,
  - e **incluir o outro** disjunto por Adição.

- **Exemplo**

1. $p \land q$
2. $p \rightarrow [q \rightarrow (s \land t)]$
3. $\vdash s \leftrightarrow t$

Deduzindo "s ↔ t":

	$\vdash s \leftrightarrow t$	
1	$p \wedge q$	premissa
2	$p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$	premissa
3		
4		
5		
6		

Simplificação da Conclusão

Deduzindo "s ↔ t":

	$\vdash s \leftrightarrow t$	
1	$p \wedge q$	premissa
2	$p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$	premissa
3	$p \wedge q \rightarrow s \wedge t$	2, EI
4	$s \wedge t$	1, 3. MP
5	$(s \wedge t) \vee (\neg s \wedge \neg t)$	4, AD
6	$s \leftrightarrow t$	5, BICOND

Dedução

por absurdo

Prof. Luis Rodrigo
luisrodrigoog@gmail.com
http://luisrodrigoog.ddns.net/ - http://lrodrigo.ddns.net/

- Considere o argumento **P → Q**, onde P é a conjunção de premissas, e Q é a conclusão.
- Então, se o **argumento** for **válido** **¬ P ∨ Q** também o será;
- Consequentemente, sua negação, **¬ (¬ P ∨ Q)**, que, por De Morgan, é equivalente a **P ∧ ¬ Q**, será uma contradição.
- Então, para mostrarmos que o argumento **P → Q é válido**, é suficiente mostrar que **P ∧ ¬ Q é uma contradição**.
- Ou seja, para mostrarmos que um argumento é válido, **podemos**:
    - **negar a conclusão, incluí–la nas premissas**
    - **e deduzir F**, que representa uma contradição.

Considere o argumento

1. $p \rightarrow q \lor r$
2. $q \rightarrow \neg p$
3. $s \rightarrow \neg r$
4. $\vdash \neg (p \land s)$

Considere o argumento

1. $p \rightarrow q \vee r$
2. $q \rightarrow \neg p$
3. $s \rightarrow \neg r$
4. $\vdash \neg (p \wedge s)$

- Utilizando demonstração por absurdo, **incluímos** $p \wedge s$ nas **premissas** e **deduzimos** uma **contradição**:

1. $p \rightarrow q \vee r$
2. $q \rightarrow \neg p$
3. $s \rightarrow \neg r$
4. $p \wedge s$
5. $\vdash F$

Simplificação da Conclusão

- Deduzindo "F":

	$\vdash$ F	
1	$p \rightarrow q \lor r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \land s$	premissa
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Simplificação da Conclusão

- Deduzindo "F":

	$\vdash F$	
1	$p \rightarrow q \vee r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \wedge s$	premissa
5	p	4, SIMP
6	s	4, SIMP
7	$q \vee r$	5, 1, MP
8	$\neg r$	6, 3, MP
9		
10		
11		
12		

- Deduzindo "F":

	$\vdash$ F	
1	$p \rightarrow q \lor r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \land s$	premissa
5	p	4, SIMP
6	s	4, SIMP
7	$q \lor r$	5, 1, MP
8	$\neg r$	6, 3, MP
9	q	7,8, SD
10	$\neg p$	9, 2, MP
11	$p \land \neg p$	10, 5 CONJ
12	F	11, EC